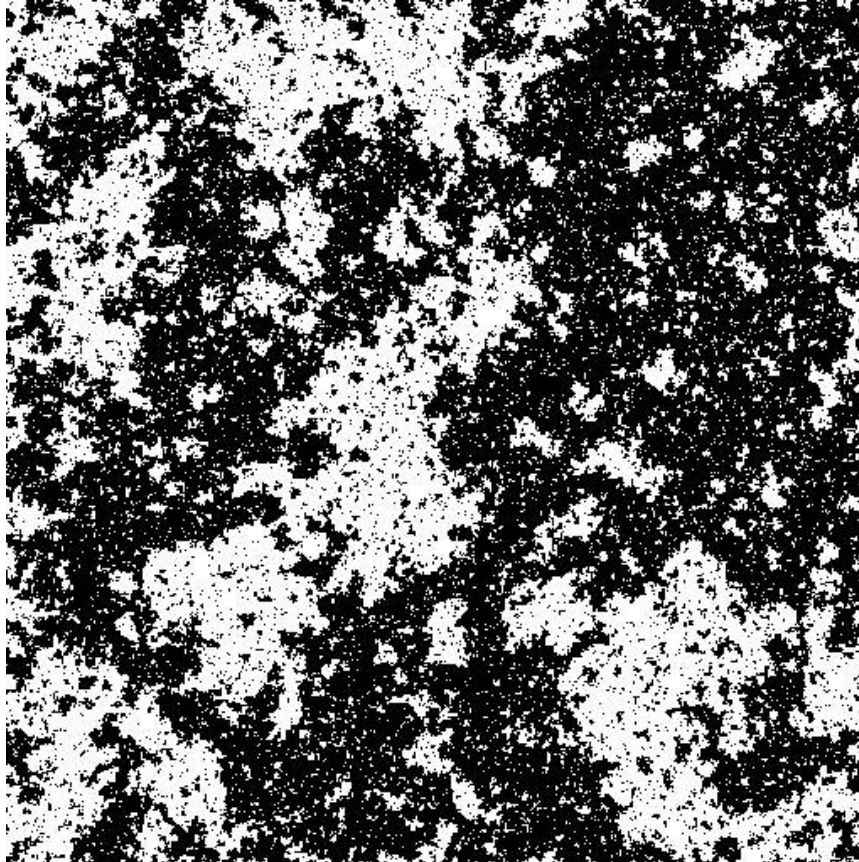




Das Ising Modell



David Riedmann
Florian Feyand

Parallele
Algorithmen
18.06.2008



Wer war Ising?



Ernst Ising (1900 – 1998)

Doktorarbeit unter Wilhelm
Lenz

Dissertation zum
Ferromagnetismus (1925)



Ferromagnetismus

- Eigenschaft gewisser Stoffe (z.B. Eisen)
- ferromagnetisches Material wird unter Einfluss eines Permanentmagneten selbst magnetisch
- oberhalb einer kritischen Temperatur verschwindet der Ferromagnetismus



Ising Modell

- Versuch, den Ferromagnetismus zu erklären
- 2-dimensionales Feld mit Elektronenspins
- quadratisches Gitter mit periodischer Randbedingung
- zeigt den Phasenübergang zwischen Ferro-, und Paramagnetismus



Elektronenspins

- Spins können nur 2 Werte annehmen
- entweder positiv oder negativ ausgerichtet
- benachbarte parallele Spins senken Energie
- benachbarte anti-parallele Spins erhöhen Energie



Observablen

$$\langle E \rangle = - \sum_{\langle i, j \rangle} S_i S_j$$

$$\langle M \rangle = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N S_i$$

$$\langle |M| \rangle = \left| \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N S_i \right|$$

- lassen Rückschlüsse auf kritische Temperatur zu

- Werte lassen sich per Importance Sampling explizit errechnen (dank Boltzmann-Verteilung)



Observablenberechnung

Wahrscheinlichkeit, dass ein System sich in Zustand σ befindet, hängt ab von

- Energie $E(\sigma)$
- Temperatur T

Boltzmannverteilung:

$$p(\sigma) = \frac{1}{Z} * e^{-E(\sigma)/k_B T} \quad \text{mit} \quad Z = \sum_{\sigma} e^{-E(\sigma)/k_B T}$$



Übergangswahrscheinlichkeit

- berechnet sich aus Spinumgebung
- per Metropolis-Algorithmus nach "detailed balance"

$$W(\sigma \rightarrow \tau) = \begin{cases} e^{-\Delta E/T} & \text{wenn } \Delta E > 0 \\ 1 & \text{wenn } \Delta E \leq 0 \end{cases}$$