Schnelle Fouriertransformation

Vortrag über FFT (Fast Fourier Transform)

im Seminar Parallele Algorithmen im SS 2008
bei Prof. Dr. Elmar Schömer
und Dr. Johannes Josef Schneider

gehalten von Martin Unold

Schnelle Fouriertransformation

<u>Gliederung</u>

1. Kontinuierliche Fouriertransformation
2. Diskrete Fouriertransformation
3. FFT-Algorithmus
4. Anwendungsbeispiele

1. Kontinuierlicher Fall

- Jean Baptiste Joseph Fourier
  - Geboren am 21.03.1768 (Auxerre)
  - Gestorben am 16.05.1830 (Paris)
  - Französischer Mathematiker und Physiker
  - Entwickelte 1822 in seiner „Théorie analytique de la chaleur“ die Fourier-Transformation
- Kontinuierliche Fouriertransformation
  - Überführe eine Gegebene Funktion in ihre Fourier-Transformierte

1. Kontinuierlicher Fall

- Hintransformation

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt,$$

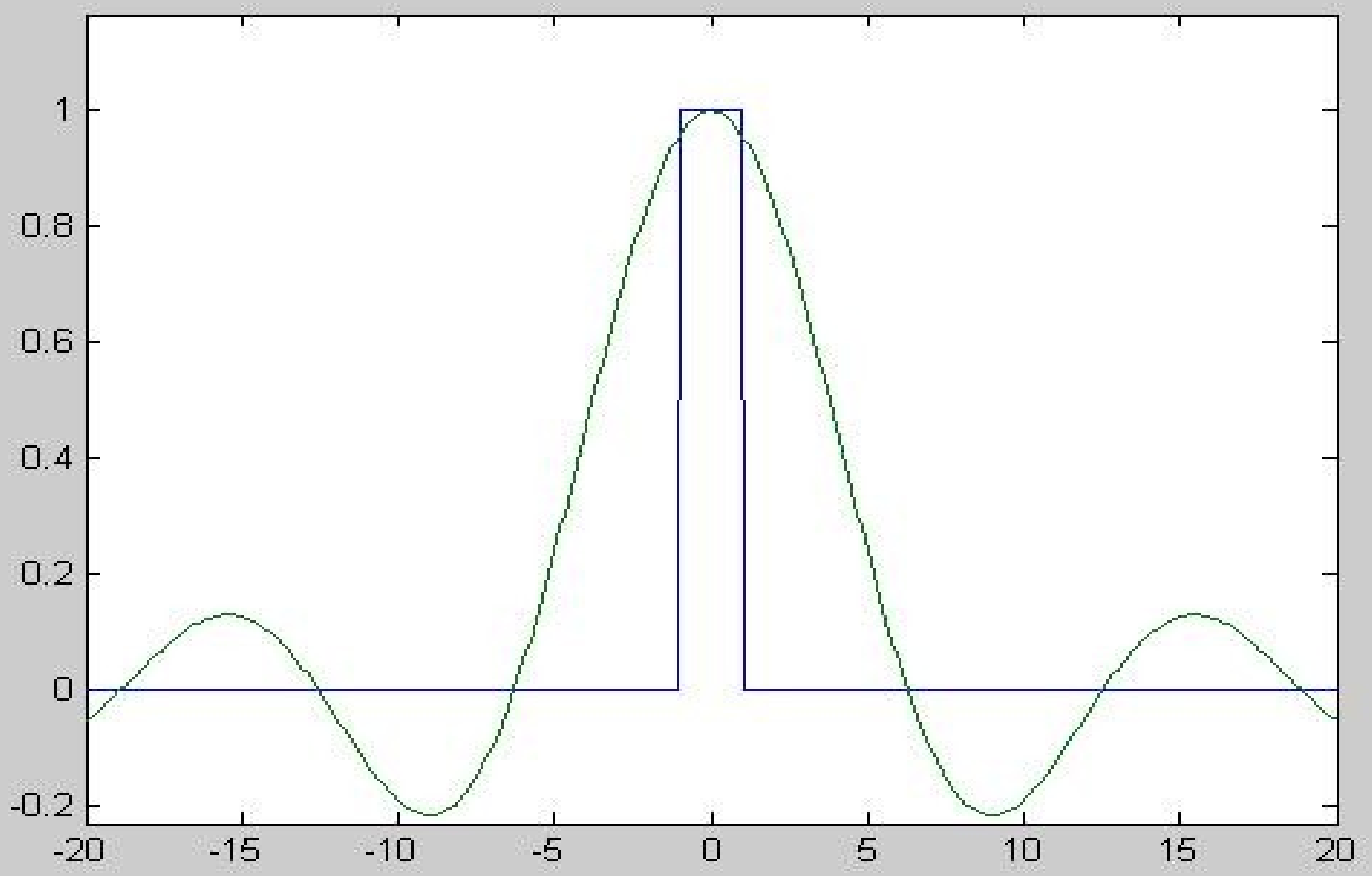
- Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t}\, d\omega.$$

1. Kontinuierlicher Fall

- Beispiel
- Die Stufenfunktion
  $f(t) = 1$ für $-1 \leq t \leq 1$
  $f(t) = 0$ sonst
  wird durch Fouriertransformation überführt:
- $F(\omega) = \sin(\omega) / \omega$

1. Kontinuierlicher Fall



2. Diskreter Fall

- In der Praxis sind häufig nur einzelne Werte einer Funktion bekannt
- Integrale sind (mit Hilfe eines Computerprogramms) nur schwer zu berechnen
- Für manche Problemstellungen ist die diskrete Anschauung brauchbarer
- Entwickle also ein diskretes Modell zur Fourier-Transformation

2. Diskreter Fall

- Hintransformation

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{N-1} w^{j \cdot k} \cdot a_j$$

- Rücktransformation

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w^{-j \cdot k} \cdot \hat{a}_j$$

2. Diskreter Fall

- <u>Beispiel</u>
- „Messwerte“ des Sinus sind gegeben durch
  $a = (0,1,0,-1)$
  und können nun überführt werden in
- $\hat{a} = (0,2i,0,-2i)$

2. Diskreter Fall

- Der naive Ansatz zur Berechnung der Koeffizienten geschieht also durch Multiplikation mit der sogenannten Fouriermatrix F mit Koeffizienten $F_{jk} = \exp(2\pi ijk/N)$
- Hat man „Messwerte“ einer mehrdimensionalen Funktion zur Verfügung, so kann man auf diese eine leicht erweiterte Transformation anwenden
- Dies funktioniert analog zum eindimensionalen Fall und wir können uns in diesem Vortrag darauf beschränken

3. Algorithmus

- Der Algorithmus zur schnellen Fourier-Transformation (englisch FFT) wurde 1965 von zwei US-amerikanischen Mathematikern veröffentlicht
  - Dr. James W. Cooley, geboren 1926
  - John Wilder Tukey, geboren 1915, gestorben 2000
- Der FFT ist ein divide-and-conquer-Algorithmus der Komplexität $T(N) = O(N \cdot \log(N))$

3. Algorithmus

- Vector fft (Vector a)
  - if (a.length == 1) return a;
  - else
    - n = a.length;
    - Vector g = fft([a_0,a_2,a_4,...,a_{n-1}]);
    - Vector u = fft([a_1,a_3,a_5,...,a_n]);
    - Vector â;
    - for(k = 0; k<n/2; k++) $\hat{a}_k = g_k + u_k \cdot \exp(-2\pi ik/n)$;
    - for(k = n/2; k<n; k++) $\hat{a}_k = g_k - u_k \cdot \exp(-2\pi ik/n)$;
    - return â;

3. Algorithmus

- Die Invertierung durch den iFFT erfolgt ganz ähnlich, die Berechnung ist geringfügig anders:
    - $\hat{a}_k = (g_k + u_k \cdot \exp(2\pi ik/n))/n$ für $k<n/2$
    - $\hat{a}_k = (g_k - u_k \cdot \exp(2\pi ik/n))/n$ für $k \geq n/2$
- Die Parallelisierung erfolgt durch getrennte Betrachtung der geraden und ungeraden Koeffizienten auf verschiedenen Prozessoren
- FFTW bietet zum Beispiel eine Unterprogramm-Bibliothek für C mit Cell-Prozessor-Unterstützung und MPI-Interface

4. Anwendungsbeispiele

- In den meisten Anwendungen wird der FFT benutzt, um einen gegebenen Datensatz in eine umgangsfreundliche Form zu bringen, die dann mit Hilfe des iFFT wieder in ihre ursprüngliche Form zurücktransformiert werden kann
- Es folgt nun ein Auszug aus der Liste der Anwendungsmöglichkeiten
- Danach wird das eine oder andere Beispiel kurz vorgestellt

4. Anwendungsbeispiele

- Kodierung und Dekodierung von Signalen auf Frequenzebene
- Kompressionsalgorithmen (z.B. mp3)
- Bild- und Audioverarbeitung
- Digitale Modulationsverfahren (z.B. Breitbanddatenübertragung per OFDM)
- Mustererkennung (z.B. Sprache)
- Multiplikation großer Zahlen
- Radar-, Nachrichten und Schalltechnik